MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
*Liberté
Égalité
Fraternité*

Conseil scientifique
de l'éducation nationale

Note du CSEN —
— Juin 2023, n°10

Les motifs, source d'éveil aux mathématiques en maternelle et au primaire

Rédigée par Lorenzo Ciccione et Stanislas Dehaene[a]

Résumé

Comment stimuler le gout des mathématiques dès le plus jeune âge ? Il est fréquent, en maternelle, de demander aux élèves de créer des motifs ou de les compléter, par exemple en enfilant sur un collier une perle jaune, une rouge, une jaune, une rouge… Ces activités sont parfois considérées comme des entrainements à la motricité fine, à l'écriture, ou à la production artistique. Nous montrons qu'elles constituent surtout un puissant stimulant pour le développement des mathématiques, particulièrement la géométrie et la logique. En effet, l'étude des motifs conduit les enfants à se forger des abstractions numériques et géométriques qu'ils peuvent transposer d'un domaine à l'autre. Repérer le même motif dans une suite de notes de musique et dans une rangée de perles attire l'attention de l'enfant sur les propriétés abstraites des nombres, des symétries, des règles et des notations écrites. C'est pourquoi nous proposons de rendre plus systématiques les activités fondées sur les motifs mathématiques en maternelle et en début de primaire, et présentons toute une hiérarchie d'activités utilisables en classe.

a Lorenzo Ciccione, chercheur postodoctorant en psychologie cognitive à l'Inserm et Stanislas Dehaene, professeur de psychologie cognitive expérimentale au Collège de France. Remerciements à Nuno Crato et Véronique Izard pour leurs commentaires.

Qu’est-ce qu’un motif ?

Tout enseignant de maternelle le sait : les enfants adorent ranger des blocs de couleurs, alterner des sons musicaux ou vocaux de manière régulière ou encore répéter des symboles graphiques les uns après les autres, dès qu’ils apprennent à tenir un stylo. Lorsqu’on les interroge sur le sujet, les enseignants rapportent que de telles activités sont essentielles au développement de la motricité fine, de l’écriture, et du sens esthétique et musical. Mais qu’ont en commun toutes les activités mentionnées ci-dessus ? Elles utilisent ce qu’on appelle généralement des « motifs » (***patterns*** en anglais), c’est-à-dire des suites ou des configurations d’objets (visuels, sonores, ou même tactiles) organisés spatialement ou temporellement selon des règles définies. En d’autres termes, ce sont des séquences dans lesquelles nous reconnaissons un certain ordre et une certaine prévisibilité, à tel point que nous pourrions les prolonger. Voici quelques exemples (figure 1) : des cubes bleus alternent avec des cubes jaunes le long d’une ligne ; ou le son aigu d’un sifflet alterne avec le son grave d’un tambour, tout en augmentant graduellement le nombre de répétitions de sons identiques ; ou encore, des figures géométriques se répètent sur un papier peint.

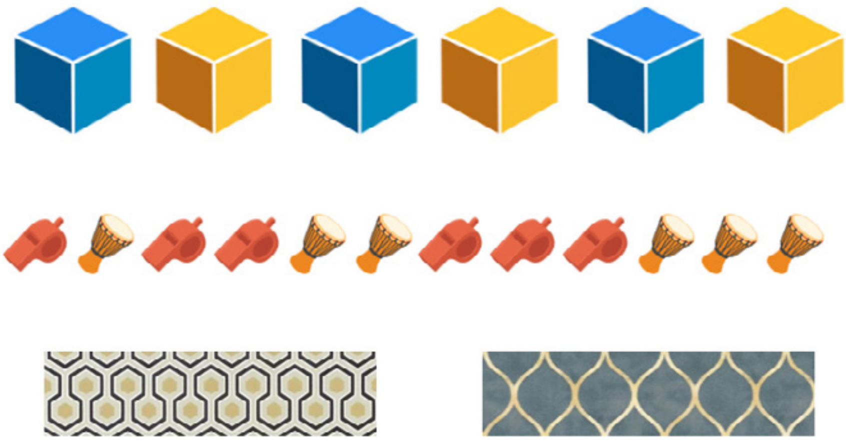

Figure 1. Exemples de motifs : série de cubes de couleur alternée ; alternance avec répétition croissante de sons aigus et graves ; motifs sur papier peint.

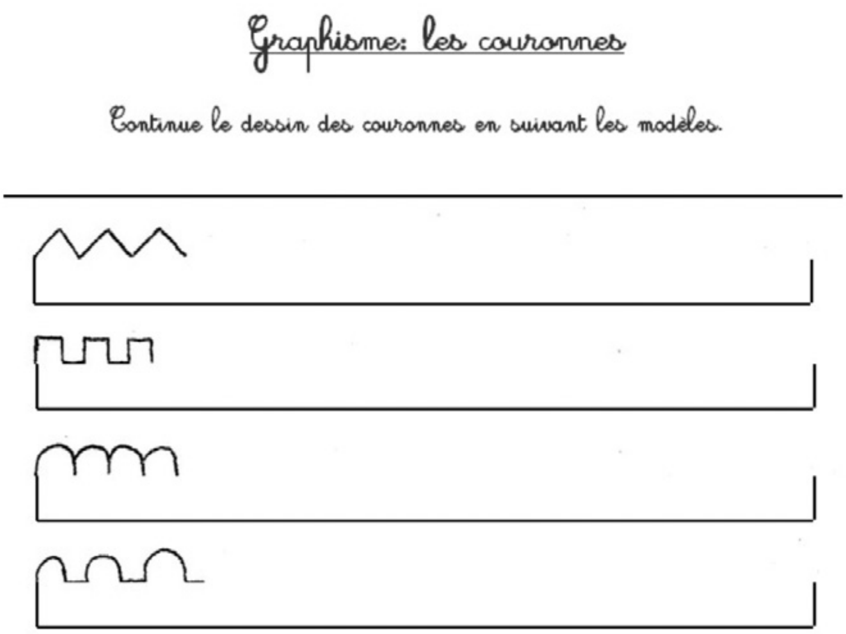

Figure 2. Exemple d’activité pour améliorer le « graphisme ».

Quel que soit le support utilisé, nous sommes constamment entourés de motifs divers et variés. Il n’est donc pas surprenant que la compréhension des motifs figure dans les programmes ministériels de la France et de nombreux pays du monde. Sous le vocable de « graphisme », de nombreux manuels proposent la réalisation de motifs géométriques répétés, souvent comme activité préparatoire à l’écriture (figure 2), et beaucoup d’enseignants de maternelle et d’école primaire les utilisent pendant leurs heures d’enseignement. La recherche scientifique des dernières décennies donne raison aux enseignants : les activités ludiques avec des motifs semblent en effet favoriser les capacités d’abstraction bien au-delà d’une simple amélioration des capacités d’écriture ou du sens esthétique, comme on verra dans les sections suivantes. Mais qu’ont à voir les motifs avec l’abstraction ?

Différents domaines, mêmes structures abstraites

Les enfants (et les adultes) sont confrontés à la présence de motifs dans des domaines très différents : dessin, écriture, musique et mathématiques pour ne citer que les plus importants. Toutefois, qu’il s’agisse de séquences visuelles, sonores ou mathématiques, la structure abstraite du motif peut être la même. Dans chaque motif, on peut reconnaître une unité minimale (points, blocs, nombres, sons) qui est répétée dans l’espace et/ou dans le temps en suivant une règle ou plusieurs règles bien précises. Pour clarifier le concept, prenons deux exemples : un visuel, l’autre sonore. Comme on peut le voir sur la figure 3, un carré rouge est suivi d’un carré bleu (qui forment dans ce cas une « unité minimale »), suivis à leur tour de deux carrés rouges et deux bleus, et enfin trois rouges et trois bleus ; dans ce motif, la règle est claire : on alterne deux couleurs différentes, mais en ajoutant à chaque alternance un carré de chaque couleur, en sorte que leur

Glossaire

Motif : disposition ordonnée d'éléments qui se répète selon une certaine règle. Ces éléments peuvent être des objets, des formes géométriques en deux ou trois dimensions, des sons, des nombres… Deux motifs peuvent avoir une manifestation physique différente (par exemple une séquence de sons ou une série de blocs colorés) mais être organisés selon la même règle abstraite (par exemple l'alternance de deux éléments l'un après l'autre : ABABAB).

Règle : formule abstraite qui détermine comment les éléments d'un motif sont organisés. La règle est abstraite, indépendante du motif physique par laquelle elle est illustrée : une même règle peut être représentée par un motif composé de sons, des objets, des nombres, etc. Reconnaître la règle sous-jacente à un motif donné permet de prévoir son évolution. Il existe des règles simples (comme celle de répétition d'un même élément – AAAA – ou d'alternance entre deux éléments – ABAB) et des règles plus complexes, qui prévoient, par exemple, une progression croissante du nombre d'apparitions de chaque élément (ex : ABAABBAAABBB), des paires, des triplets, une symétrie… ou encore un enchâssement de ces concepts.

Programme mental : représentation mentale qu'un humain se fait de la règle à laquelle obéit un motif. Un tel programme permet de comprimer un motif pour qu'il prenne moins de place en mémoire (ABABABAB…= « une alternance »). Il structure et guide les pensées et les actions liées au motif présenté (par exemple : le copier, le transposer ou le compléter). Un programme mental peut ne pas respecter la véritable règle qui sous-tend le motif, en particulier lorsque celle-ci est complexe et difficile à comprimer.

nombre augmente : 1,1,2,2,3,3…. Prenons maintenant l'exemple sonore de la figure 3 ; l'alternance des deux notes est déterminée par la même règle utilisée pour la séquence de blocs colorés : do, fa, do, do, fa, fa, do, do, do, fa, fa, fa. Dans cet exemple, les unités minimales ont une apparence différente (carrés colorés ou notes de musique) mais la règle est la même : en d'autres termes, ces motifs sont deux manifestations physiques distinctes de la même règle, qu'on pourrait noter comme la formule abstraite « ABAABBAAABBB ».

Il est donc clair que **la notion de motif est profondément abstraite**, puisqu'elle ne dépend pas de l'unité concrète à laquelle elle s'applique. De plus, la recombinaison d'un nombre limité de règles peut donner lieu à des manifestations de motifs superficiellement très différents les uns des autres. Il est enfin important de souligner que la reconnaissance, la mémorisation ou la (re)production d'un motif sont évidemment déterminées par le niveau de concrétude ou d'abstraction symbolique de son unité minimale (manipuler des blocs colorés n'est pas la même chose que manipuler une séquence de nombres), ainsi que par la quantité et la typologie de règles qui lui sont appliquées (la notion de « répétition » est certainement plus intuitive que celle de « nombre croissant »).

Les mathématiques sont la science des motifs

Les mathématiques modernes sont souvent définies comme la science des motifs ou des régularités[1] : on pourrait presque dire que le but des mathématiques est de trouver, formaliser et réutiliser des motifs dans le monde qui nous entoure. Si la formalisation algébrique (c'est-à-dire qui utilise des lettres à la place des nombres) est difficile à comprendre pour les enfants qui commencent à étudier les mathématiques[2], les motifs sont souvent utilisés pour aborder l'algèbre de façon intuitive[3].

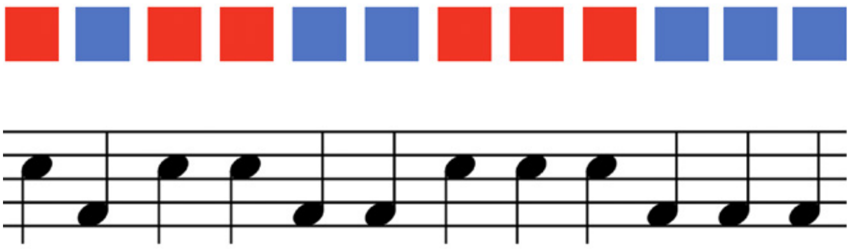

Figure 3. Motif suivant la même règle mais représenté sous deux modalités différentes : visuelle et auditive.

La recherche scientifique a prouvé que les êtres humains perçoivent très tôt les motifs mathématiques. Lorsqu'on leur montre une forme géométrique, qu'on leur demande de copier un dessin, ou qu'on leur fait entendre une série de sons, les adultes comme les enfants en perçoivent très rapidement la logique abstraite (voir l'encadré sur « Psychologie cognitive et neurosciences des programmes mentaux »). Plus ce programme est simple, meilleur est leur mémoire (une alternance ABAB…, par exemple, est plus facile à retenir qu'une séquence AABBAABB…)[4]. L'énumération d'une collection d'objets leur est plus facile lorsqu'ils peuvent l'organiser mentalement en sous-groupes qui se répètent[5], particulièrement si ces sous-groupes sont organisés selon le même motif visuel[6]. Ils sont capables de reconnaître des fonctions régulières, linéaires (une droite) ou pas (un zig-zag), lorsqu'elles sont représentées sous forme de graphiques[7–11]. Ils sont capables de combiner des formes géométriques pour former par exemple « un carré fait de petits cercles »[12], un concept très abstrait qui dépasse ce que d'autres animaux parviennent à concevoir[13].

Cette compréhension est intuitive, « proto-mathématique » : elle ne nécessite aucune connaissance formelle de l'algèbre ou de la géométrie. Au contraire, les recherches scientifiques les plus récentes suggèrent que, dès la maternelle, le recours à des activités ludiques et intuitives, axées sur la reconnaissance et l'utilisation de motifs peut faciliter le développement non seulement des capacités visuo-spatiales et de lecture/écriture, mais aussi l'apprentissage des mathématiques[14]. Dans les paragraphes suivants, nous présentons d'abord la trajectoire évolutive de la compréhension et de la manipulation de motifs proto-mathématiques, puis nous nous attardons sur les études qui suggèrent un lien entre la compréhension des motifs et les compétences mathématiques.

La compréhension des motifs au cours du développement de l'enfant

Si la reconnaissance visuelle et auditive de séquences simples est possible dès la naissance[15], ce n'est qu'à partir de 3 ans (c'est-à-dire à l'entrée à l'école maternelle) que l'enfant montre qu'il est capable de reconnaître et de produire des motifs. À l'âge de 3 ans, les enfants sont capables de recréer des combinaisons simples de 2 à 3 blocs en copiant un modèle proposé[16] (figure 4, gauche).

Figure 4. Progression des capacités des enfants.

À 3 ans les enfants sont capables de copier un motif composé de quelques éléments. À 4 ans ils parviennent à étendre différents motifs (avec différentes unités minimales sujettes à répétition, indiquées en rouge) : ABAB, AABBAABB et ABBABB. Vers 4 ans et demi (et plus), ils peuvent également transposer un motif, c'est-à-dire le reproduire en utilisant des formes différentes.

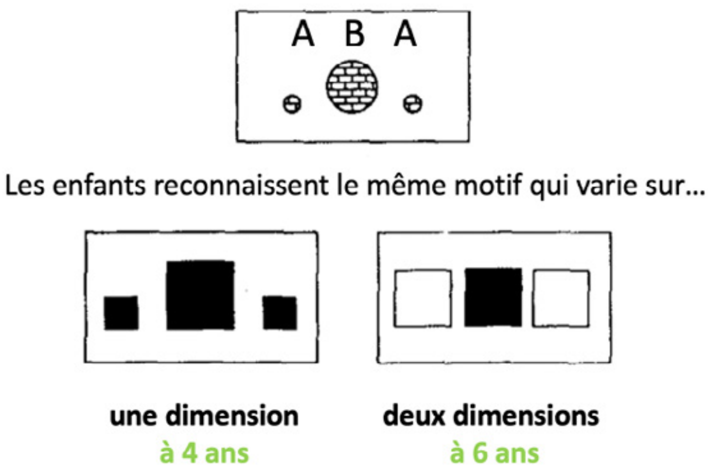

Figure 5. Le motif du haut a la même structure abstraite que les motifs du bas (ABA). Dans le premier, les rapports de taille sont respectés ; dans le deuxième, les rapports de taille ne sont pas respectés et B a une couleur différente de celle de A.

À partir de 4 ans, ils sont capables de reproduire, d'étendre et d'abstraire des motifs tels que ABAB, AABBAABB et ABBABB[17] (figure 4, centre), mais tous ne sont pas encore capable d'extraire et d'indiquer l'unité minimale qui est répétée. De plus, à 4 ans et demi, lorsqu'on leur présente des motifs simples tels que ceux de la figure 4, ils sont capables de les copier en utilisant des éléments différents de ceux auxquels ils ont été exposés (c'est-à-dire de formes et/ou de couleurs différentes ; figure 4, droite). Cette transposition d'une règle d'un support à l'autre est facilitée lorsque les motifs sont décrits à l'aide d'étiquettes abstraites (par exemple avec la série de lettres ABAB[18]).

Ils sont également mieux capables de généraliser à partir de motifs de trois items, de type ABA, lorsqu'on attire leur attention sur la position latérale des deux éléments marginaux par rapport à l'élément central (figure 5)[19]. Ces deux études suggèrent clairement que travailler sur la dimension abstraite des motifs est non seulement possible, mais utile dès les premières années de l'école maternelle. Cependant, à l'âge de 4 ans, les enfants semblent encore incapables d'étendre des motifs avec des nombres croissants, tels que ceux décrits précédemment dans la figure 1 (ligne du milieu)[20], ce qui suggère que leur jeu de programmes mentaux se limite à des opérations simples de répétition et d'alternance. À l'âge de 4 ans, ils ont également du mal à reconnaître le même motif ABA s'il est présenté avec des éléments qui diffèrent sur plus d'une dimension[19] (figure 5, droite) : en d'autres termes, leurs capacités d'abstraction ne semblent pas résister à des variations trop importantes de l'apparence des stimuli. Cette tâche est correctement réalisée à l'âge de 6 ans.

En effet, c'est à partir de 5/6 ans que les capacités de manipulation de motifs explosent : à cet âge, les enfants sont désormais capables d'étendre une séquence d'objets organisés selon des motifs différents, indépendamment de la caractéristique physique qui varie (forme, couleur, dimension…[21]).

Lien entre compréhension des motifs et capacités spatiales et mathématiques

Plusieurs études suggèrent qu'il existe un lien étroit entre les capacités de compréhension des motifs et les capacités visuo-spatiales et logico-mathématiques. Nous distinguons principalement deux types d'études : les études corrélationnelles (qui trouvent des corrélations entre les capacités de compréhension des motifs et d'autres capacités cognitives) et les études interventionnelles (qui cherchent à mesurer si l'entraînement des premières peut conduire à une amélioration des secondes).

Dans le cas spécifique des briques colorées type *Lego*, qui sont l'un des outils les plus couramment utilisés dans l'éducation pour stimuler la compréhension des motifs, il a été observé que le temps passé à jouer avec elles est corrélé avec les capacités spatiales des enfants âgés de 5 ans et demi[22]. À 3 ans, la capacité de copier des motifs présentés sous forme de blocs colorés est corrélée à de nombreux tests de compréhension numérique, y compris des tâches d'énumération, de classement des nombres et d'arithmétique non verbale[16]. Les capacités de compréhension des motifs semblent également corrélées à celles de compréhension de proportions (tâches de comparaison/reproduction de proportions présentées sous forme non symbolique[23]). Même chez les enfants plus âgés (10 ans), la capacité de manipuler des motifs de nature numérique continue d'être corrélée aux résultats en mathématiques[24].

Il est important de souligner que les études présentées jusqu'à présent ne peuvent pas exclure que le lien entre les capacités de compréhension des motifs et des mathématiques soit expliqué par une amélioration générale des capacités visuo-spatiales ou intellectuelles : il y a en effet une forte corrélation entre la capacité de copier et d'étendre des motifs, et la mémoire de travail visuo-spatiale[25] (c'est-à-dire la fonction cognitive qui nous permet de maintenir en mémoire plusieurs objets et leur position). Deux études récentes semblent cependant indiquer une corrélation forte et spécifique entre les deux capacités, même lorsque l'intelligence[26] et les capacités spatiales[14] sont prises en compte.

Des preuves encore plus fortes de l'existence d'un lien avec les capacités mathématiques proviennent d'études interventionnelles, où l'on entraîne les élèves et on vérifie si cet apprentissage induit une amélioration d'autres compétences – seules ces études peuvent nous indiquer s'il existe un lien de causalité entre deux ou plusieurs fonctions cognitives. Un entraînement de six mois (15 minutes, trois fois par semaine) sur des enfants de 6 ans, visant à stimuler la compréhension et la manipulation de différents types de motifs (y compris répétitions, rotations, transformations symétriques, lecture de l'heure, etc.), a conduit à une amélioration significative de leurs capacités dans ce domaine[27] et également à des améliorations en mathématiques et en lecture[28] par rapport aux élèves qui avaient reçu une instruction approfondie dans d'autres matières scolaires. Quatre courtes leçons sur les motifs et le concept d'unité minimale de répétition, données à des élèves de 9 ans, semblent également suffisantes pour faciliter la discussion des élèves sur les fractions et les proportions[29]. Ces résultats doivent cependant être pris avec prudence car ils ne sont pas toujours reproduits : en effet, une étude récente a montré qu'un entraînement de 30 minutes par semaine pendant 20 semaines avec des motifs basés sur des règles de répétition et de nombres croissants conduisait à une amélioration de la compréhension de ces motifs, mais sans transfert significatif aux connaissances mathématiques au sens large[30].

Il convient enfin de souligner que de nombreux auteurs mettent en garde les lecteurs contre le risque de surestimer les résultats exposés jusqu'à présent : la plupart des études présentent en effet des corrélations faibles ou modérées[31]. Cependant, des effets beaucoup plus importants pourraient être observés si l'on utilisait des objets différents, plus abstraits que ceux généralement utilisés en maternelle. Les activités de production de colliers de perles ou de séries de briques colorées, surtout si elles sont pratiquées à outrance avec le même motif d'alternance ABABAB, ne rendent guère justice aux compétences d'abstraction des enfants[14].

Au-delà des motifs visuels : la musique

Les études présentées jusqu'à présent ont utilisé des motifs visuels. Mais les êtres humains sont parfaitement capables

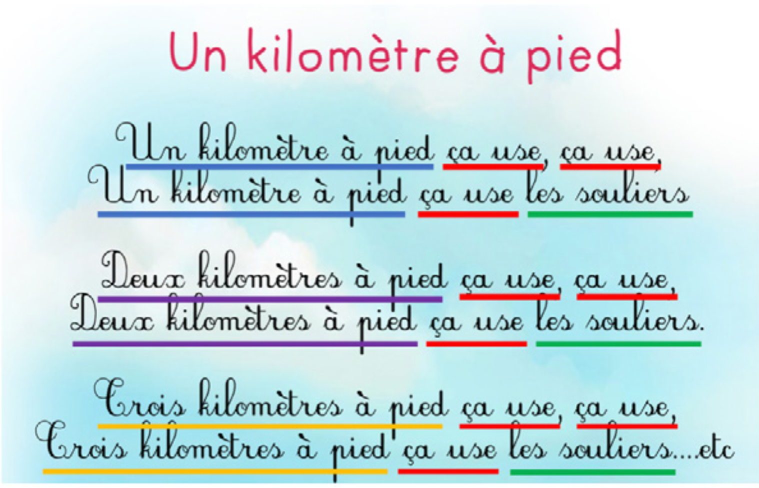

Figure 6. Example de comptine qui suit un motif crée par une règle de répétition, alternance et nouveauté. Pour faciliter la reconnaissance du motif, les mêmes éléments ont été soulignés de la même couleur. Le motif est le suivant : AXX AXY, BXX BXY, CXX, CXY, etc.

d'apprendre les règles sous-jacentes à des motifs sonores complexes, comme des séquences binaires de sons[32]. Et les enfants sont exposés dès leur plus jeune âge à des motifs de nature musicale : il suffit de penser aux comptines (un exemple est fourni en figure 6), qui sont souvent structurées selon des règles de répétition et d'alternance.

Dès quelques mois après la naissance, les enfants sont en effet naturellement attirés par des motifs rythmiques musicaux simples[33] et il a également été suggéré que faire écouter et reproduire des comptines contenant des expressions organisées selon des motifs définis pourrait favoriser l'intérêt pour les mathématiques[34,35]. La représentation visuelle des motifs auditifs semble également améliorer les compétences musicales[36], et les deux types de représentations partagent, au moins en partie, les mêmes réseaux cérébraux[37]. Cela suggère une fois de plus l'importance, pour aider l'enfant à passer à l'abstraction, de présenter les mêmes motifs à travers des modalités sensorielles différentes.

Les résultats expérimentaux sont cependant contrastés : certaines études ont suggéré que la pratique musicale intense améliore les capacités mathématiques[38,39] et, plus spécifiquement, semble améliorer précisément la capacité à manipuler des formes géométriques et des motifs symétriques[40] ; d'autres études randomisées n'ont cependant montré aucune amélioration des capacités mathématiques à la suite d'un entraînement musical[41].

La pratique musicale pourrait également avoir des effets qui dépassent les mathématiques et améliorer la lecture[42] (qui bénéficie aussi d'un entrainement visant à distinguer les motifs récurrents des lettres[43]). La pratique musicale corrèle d'ailleurs avec la compréhension grammaticale chez les enfants d'âge scolaire[44]. Bien qu'il soit raisonnable de penser que la musique et les mathématiques partagent quelque chose de spécial par rapport aux autres disciplines (la nécessité de comprendre et de manipuler des motifs), les données sont encore très limitées, et des travaux supplémentaires seront nécessaires pour explorer la réalité du lien entre les motifs, la musique et les mathématiques.

Recommandations pour les enseignants

Sur la base des études scientifiques citées plus haut, nous proposons des recommandations pédagogiques destinées aux enseignants de maternelle et de début d'école primaire (CP). L'idée est de faire pratiquer à leurs élèves, plus systématiquement, des activités diverses mais centrées sur les motifs (figure 7).

1. Se concentrer sur l'aspect abstrait des motifs

Il est important que l'enfant soit conscient que le motif ne dépend pas de la présence d'éléments spécifiques. En d'autres termes, l'enseignant doit aider l'enfant à abstraire l'ensemble des règles qui composent le motif et à les dissocier de leur manifestation physique particulière. Pour favoriser ce processus d'abstraction, il peut être utile de se référer aux éléments qui composent le modèle en utilisant des étiquettes qui n'ont aucun lien avec l'objet particulier (par exemple, les lettres de l'alphabet, ABAB, ou bien des noms inventés comme « pouf bim pouf bim »). La recherche suggère également qu'il est important

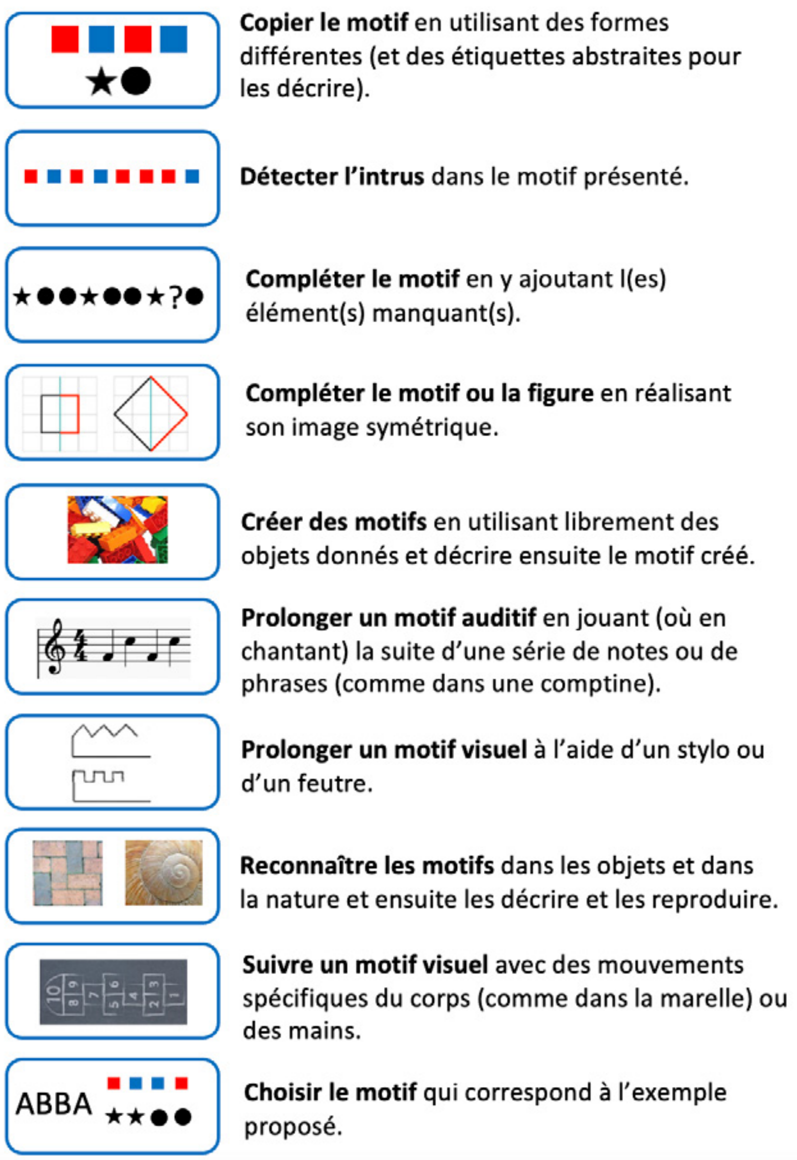

Figure 7. Exemples d'activité de compréhension, de manipulation et de production des motifs.

de souligner les relations entre les éléments qui composent le motif, en se concentrant sur des aspects tels que la symétrie et l'ordre. Les motifs sont une excellente occasion d'introduire, dès la maternelle, une partie du vocabulaire des nombres et de la géométrie (paire, triplet ; répétition, miroir, symétrique ; endroit, envers ; carré, triangle…).

2. Proposer des motifs dans des modalités sensorielles différentes

Les liens entre les compétences mathématiques, musicales, de lecture et d'écriture dépendent probablement, au moins en partie, de l'utilisation commune des règles abstraites. Présenter aux élèves des exemples de motifs provenant de toutes ces disciplines (figures géométriques, séries numériques, séquences sonores, comptines, répétitions de signes graphiques) pourrait favoriser l'abstraction et permettre aux élèves de généraliser les compétences acquises dans une modalité à une autre. Bien que les études visant à déterminer les possibilités concrètes de généralisation soient encore en cours, il semble raisonnable de stimuler la reconnaissance et la manipulation de motifs dans toutes les disciplines et toutes les modalités qui offrent cette opportunité. L'idée même qu'une séquence de sons puisse être représentée par une suite de lettres, de la gauche vers la droite, est à la base de l'écriture et de la notation musicale. Jouer à écrire les motifs que l'on entend, ou à les transcrire à l'aide de gommettes ou de briques colorées, peut préparer les élèves à la lecture dès la maternelle.

3. Utiliser différents supports, différents motifs et différentes tâches

Au-delà de la discipline ou de la modalité spécifique, il peut être important de varier autant que possible le matériel utilisé lors des activités impliquant le recours à des motifs. Prenons l'exemple le plus classique, c'est-à-dire la présentation de motifs de manière visuelle : la plupart des études présentées dans ce texte utilisent des petits objets (perles) ou des briques colorées organisés en séquence. Cependant, l'utilisation exclusive de ces outils pourrait ne pas permettre aux enfants d'exprimer toutes leurs capacités de compréhension des motifs. La mémoire de travail a en effet ses limites, surtout chez les plus jeunes enfants : par exemple, il est très difficile pour un enfant de 4 ans de reproduire un motif dont l'unité minimale est composée de plus de 3 ou 4 éléments différents, simplement parce qu'il aurait des difficultés à retenir une telle quantité d'items. Cela ne signifie pas cependant qu'il n'a pas la capacité de reconnaître des motifs bien plus complexes que les simples programmes de répétition et d'alternance présentés dans ce texte. Dans ce sens, les activités avec du papier et un crayon, où l'on demande de continuer une frise géométrique en suivant le motif, semblent particulièrement utiles ; dans ce cas, l'accent devra également être mis non pas (ou pas seulement) sur le respect rigoureux du geste moteur et des relations précises entre les signes graphiques (en termes, par exemple, de taille et dimension), mais aussi et surtout sur la règle abstraite sous-jacente, afin de valoriser la reconnaissance de structures et de séquences, au-delà de la simple amélioration de la motricité fine.

4. Stimuler les multiples intuitions proto-mathématiques

Certaines classes de maternelle se limitent à des motifs très restreints et relativement simples (une perle rouge, une jaune, une rouge, une jaune…), et ce sans référence explicite à des mots du vocabulaire mathématique. Nous proposons, au contraire, d'utiliser également des motifs plus complexes qui permettent de stimuler l'imagination et l'abstraction des élèves, et de leur introduire, plus ou moins implicitement, de nombreux concepts proto-mathématiques. Plus concrètement, nous proposons les motifs séquentiels et géométriques suivants.

Motifs séquentiels

Les motifs proposés doivent aller au-delà de simples séries alternées (de type ABAB, c'est-à-dire avec un seul élément par groupe), pour inclure des répétitions de groupes de deux (AABBAABB) ou trois éléments (AAABBBAAABBB). En outre, surtout pour les élèves plus âgés, il peut être utile d'introduire des séries dans lesquelles les éléments alternent en suivant une progression croissante ou décroissante du nombre de répétitions (comme dans le cas de ABAABBAAABBB ou AAABBBAABBAB). De telles séries peuvent être l'occasion d'aborder, très tôt, des concepts qui sont notoirement difficiles à assimiler pour de nombreux enfants, comme les proportions et les fractions, notamment par le biais de questions à l'enfant : « Qu'en penses-tu : as-tu utilisé autant de perles jaunes que de rouges ? Pourquoi ? ». Ces séquences, présentées par exemple sous forme de colliers (figure 8), peuvent également être l'occasion d'introduire des concepts mathématiques sans référence explicite à des unités numériques et sans demander des calculs arithmétiques. Développer le motif « ABBABB » fait réfléchir à la notion de fraction (« deux perles sur trois sont rouges », « il y a deux fois plus de perles rouges que de jaunes », etc).

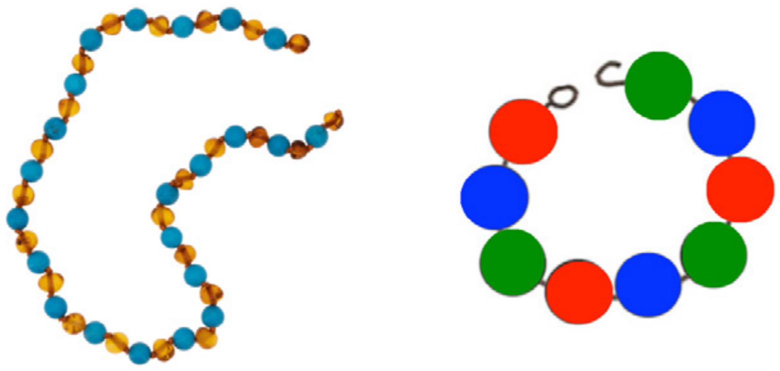

Figure 8. Exemples de colliers dont les perles suivent des règles d'alternance séquentielle.

Le collier à gauche sur la figure 8 devrait inciter l'enfant à découvrir seul que « la moitié des perles sont bleues ». À droite, la répétition présente dans le motif ABCABCABC peut l'inciter à découvrir certaines décompositions des petits nombres entiers : « il y a 3 groupes de 3 perles, ça fait 9 perles ».

Motifs géométriques

Les motifs géométriques sont un autre bon exemple d'activité proto-mathématique. En plus des activités déjà mentionnées ci-dessus (comme compléter des spirales ou des frises grecques), il peut être utile de proposer aux élèves des activités basées sur l'assemblage de formes géométriques simples, un jeu qui devient de plus en plus populaire parmi les activités ludiques disponibles dans le commerce (figure 9). L'assemblage d'un hexagone, comme dans la figure proposée, à partir de différentes formes, peut en effet stimuler la compréhension intuitive de divers concepts proto-mathématiques, notamment la récursivité (« 12 triangles roses répétés forment un hexagone »), les fractions (« 6 blocs bleus occupent le même espace que 12 blocs roses ») ou la symétrie (« De combien de façons puis-je séparer chaque hexagone pour obtenir deux images symétriques ? »).

Figure 9. Exemple de jeu d'assemblage de formes géométriques (ici, 21st century pattern blocks).

Les activités de ce type présentent également un grand avantage collatéral : elles sont perçues comme des activités artistiques et ludiques, elles peuvent diminuer l'anxiété propre au domaine des maths et, peut-être, le biais entre les garçons et les filles. En effet, la recherche a montré tout le poids du stéréotype selon lequel les mathématiques sont une activité réservée aux garçons. Ce stéréotype influence profondément les performances des filles en mathématiques à l'école dès la classe de CP (nous vous invitons à lire la note 3 du CSEN à ce sujet). Cependant, lorsque la même activité de copie d'une figure géométrique est présentée comme « du dessin » plutôt que « des maths », ce stéréotype disparait, et les filles et les garçons obtiennent des performances comparables[45]. Les motifs semblent donc un domaine idéal pour faire aimer les mathématiques aussi bien par les filles que par les garçons.

5. Au primaire, stimuler la pensée algébrique avec des motifs numériques

À l'école primaire, avec l'apprentissage formel des mathématiques et, plus spécifiquement, avec l'introduction de l'arithmétique, des motifs numériques plus complexes peuvent être systématiquement proposées en classe. En effet, la plupart des activités proposées jusqu'à présent dans cette note peuvent être repensées en utilisant des nombres plutôt que des sons ou des blocs de couleur. Par exemple, il pourrait être utile de proposer aux élèves des séries de nombres simples telles que 4, 7, 10, 13, 16, 19 et de leur demander de les compléter. La difficulté – et donc l'intérêt – d'une série de ce type, dans laquelle chaque élément successif ajoute 3 unités au précédent, réside dans la stimulation active de la recherche d'une régularité dans la séquence : il n'est pas possible de faire appel à la mémoire, en essayant d'utiliser des tables de multiplication apprises par cœur, comme on pourrait le faire dans le cas d'une série plus simple telle que 2, 4, 6, 8, 10. D'autres exemples de suites de nombres de ce type sont : 19, 17, 15, 13… (soustraction de 2 unités) ; 2, 4, 8, 16, 32… (multiplication par 2) ; ou encore des séquences mixtes, dans lesquelles on alterne différents règles : 3, 6, 4, 7, 5, 8… (on ajoute 3 unités puis on en soustrait 2).

La recherche d'une règle dans de telles suites constitue une excellente introduction intuitive à la pensée algébrique, qui est généralement introduite formellement bien plus tard, au collège. Elle conduit à toutes sortes de questions intéressantes – par exemple, en poursuivant la série 4, 7, 10, 13, 16, 19…, peut-on atteindre le nombre 20 ? 100 ? 1 000 ? 10 000 ? Pourquoi ? Peut-on donner une formule générale pour tous les nombres de la série ? Ces questions dépassent évidement le cadre du CP, mais montrent bien comment la familiarisation avec les motifs, dès la maternelle, peut servir d'introduction intuitive et décomplexée à des concepts mathématiques plus avancés, en stimulant l'imagination des élèves. Des expériences basées sur des exercices de ce type sont en cours dans les écoles françaises ; le lecteur est invité à consulter l'excellent article suivant pour aller plus loin sur le sujet : https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/des-patterns-dans-les-classes.

6. Valoriser la multiplicité des réponses correctes : un même motif peut suivre différentes règles et être formulé de différentes manières

Une objection qui pourrait être soulevée contre l'utilisation excessive d'activités centrées sur les motifs est qu'elle donne aux élèves l'impression qu'il n'y a qu'une seule réponse correcte, c'est-à-dire que chaque motif est déterminé par une règle précise et unique. Si cela semble vrai pour les motifs plus simples de répétition et d'alternance ou les motifs de nature géométrique, ce n'est pas toujours le cas pour les séquences plus complexes. Prenons par exemple une activité qui consisterait à compléter le motif suivant : AB?ABB. L'élément manquant peut être un B si nous y reconnaissons la répétition du motif ABB, ou un A si nous reconnaissons un motif basé sur une règle de « croissance » de type ABAABBAAABBB… Ces deux motifs semblent également plausibles, car leur complexité est similaire. À travers de tels exemples, l'élève peut être amené à découvrir que l'induction de la solution n'est pas un problème simple, et enrichir ainsi son répertoire de programmes mentaux.

Le rôle de l'enseignant devient alors particulièrement important : il doit montrer aux élèves la variété des règles qui conduisent à compléter certains motifs, en stimulant leur exploration et leur comparaison. Cette exploration doit toujours être, au moins en partie, guidée par l'enseignant, faute de quoi les élèves risquent de recourir uniquement à leurs propres intuitions, qui peuvent être limitées.

Notons également qu'il est tout à fait possible de trouver des **formulations différentes** pour un seul et même motif. Par exemple, le motif croissant ABAABBAAABBB… peut être décrit comme « produire un A et un B, puis 2 A et 2 B, 3 A et 3 B, etc. », ou bien comme « alterner A et B, et à chaque alternance ajouter un A et un B de plus ». Pour un jeune enfant, il n'est pas évident que ces formulations sont équivalentes. S'en convaincre, et en convaincre les autres, peut constituer une première approche de la démonstration mathématique.

7. Combiner les motifs avec un enseignement explicite des concepts mathématiques

Un danger serait de n'introduire les mathématiques que sous l'angle de la découverte, par les élèves, de certaines régularités. On entrerait alors dans une application naïve de ce que l'on appelle la « pédagogie de la découverte », qui a maintes fois démontré son inefficacité[46]. La littérature scientifique suggère qu'un enseignement **explicite** des outils mathématiques est indispensable[47–49], car la plupart des élèves ne peuvent découvrir seuls des concepts très abstraits qu'il a fallu des siècles aux mathématiciens pour les inventer. Le conseil scientifique de l'éducation nationale a régulièrement insisté sur ce point (nous invitons à lire la Lettre n° 2 du « Passeur » et à regarder le replay d'un colloque dédié à l'enseignement explicite au lien suivant : www.reseau-canope.fr/lenseignement-explicite.html). Nous ne proposons les motifs que comme une introduction concrète, intuitive, attrayante et précoce aux procédés d'abstraction qui seront, bien plus tard, aux fondements de concepts bien plus élaborés, tels que ceux de bijection, de groupe, de symétrie, de programme informatique, etc. En maternelle, il n'est bien entendu pas question d'utiliser ces termes complexes, ni la notation écrite correspondante, mais seulement de faire germer chez les élèves une première idée de leur nature.

Il apparait donc clairement que les activités proposées ici : (1) ne se substituent pas à un **enseignement explicite des concepts mathématiques**, qui demeure indispensable ; (2) concernent principalement l'**éveil** à l'abstraction à l'école maternelle et en tout début du primaire ; (3) peuvent également, plus tard, aider à introduire des concepts plus avancés (séries numériques, pavages à 2 dimensions, etc.), et ce jusqu'au plus haut niveau des mathématiques (en témoigne la découverte toute récente d'un nouveau type de pavage non-périodique[50]) – mais toujours en s'appuyant sur un enseignement explicite du vocabulaire et des concepts mathématiques correspondants.

Psychologie cognitive et neurosciences des programmes mentaux

La musique, la géométrie ou les mathématiques sont basés sur l'utilisation de motifs et de structures combinés selon des règles qui, pour être comprises, ne doivent pas nécessairement être traduites en mots[13]. En effet, la recherche scientifique suggère que l'exercice de ces disciplines (et en particulier des mathématiques) repose sur des régions cérébrales distinctes et séparées des aires du cerveau impliquées dans le langage parlé ou écrit[51,52]. De nombreuses études soutiennent l'hypothèse que notre cerveau utilise un « langage de la pensée » qui n'a pas besoin de mots[53], mais fonctionne sur la base de « programmes mentaux », un peu comme des langages informatiques, qu'il dérive, par induction, du monde extérieur[54]. Dans cette hypothèse, le motif 11223344 serait représenté en mémoire par une sorte de programme mental « pour i = 1 :4, imprimer deux fois i ». Face à une forme ou un motif régulier, le cerveau humain ne pourrait pas s'empêcher de rechercher le programme approprié, c'est-à-dire les opérations nécessaires pour le répéter ou le compléter. Par exemple, face à un carré, notre esprit « induit » que, pour le reproduire, il est nécessaire de réaliser quatre côtés de même taille et formant quatre angles droits.

Donnons un autre exemple : lorsque nous entendons l'alternance de notes de la figure 3, nous reconnaissons un schéma croissant avant même d'être capables de formaliser en mots ce que nous avons entendu. Des études récentes[12] semblent également suggérer que les humains, lorsqu'on leur demande de reconnaître ou de mémoriser des motifs de ce type, ont tendance à trouver la règle la plus simple et la plus efficace qui leur permet de comprimer l'information autant que possible. En d'autres termes, au lieu de mémoriser le nombre précis d'apparitions de chaque note du motif de la figure 3 (un do suivi d'un fa, suivi de deux do, suivi de deux fa… et ainsi de suite), nous reconnaissons sans peine le programme suivant : « alterner do et fa, et à chaque alternance ajouter un do et un fa ».

La capacité de recourir à de tels programmes mentaux est présente chez tous les êtres humains, adultes ou enfants, quel que soit leur niveau d'éducation[4,13]. Elle semble être propre au cerveau humain : si les animaux sont capables d'apprendre certaines séquences et certaines règles, ils ne convergent pas vers la solution minimale la plus simple[4] que nous reconnaissons immédiatement comme « un carré », « une alternance croissante » ou « un zig-zag ».

Ce qu’il faut retenir

- Les motifs sont des séquences d’items (objets, nombres, sons…) dans lesquelles nous reconnaissons un **ordre**, une **régularité**, et donc une **prévisibilité**.
- De nombreux enseignants des écoles maternelles et primaires proposent des exercices basés sur la reconnaissance et l’utilisation de motifs afin d’améliorer la **motricité fine** et l’**écriture**, sans forcément en percevoir la dimension mathématique.
- La recherche scientifique suggère (sans toutefois prouver de façon irréfutable) que les activités scolaires avec des motifs peuvent améliorer les **compétences mathématiques**, puisqu’elles constituent un excellent exemple d’abstraction proto-mathématique.
- Au cours de leur développement, **les enfants repèrent progressivement des régularités de plus en plus complexes** qui leur permettent de comprendre, de prolonger et de transposer des motifs.
- Afin de souligner le caractère abstrait des règles sous-jacentes aux motifs, nous suggérons de les **décliner de différentes manières** : le même motif ABABAB peut être présenté aux élèves sous la forme de sons, de perles, de lettres, de chiffres, etc.
- Au-delà des simples alternances ABABAB, les élèves de maternelle devraient être confrontés à des régularités plus complexes, par exemple des répétitions (AABBAABB…), des séries croissantes (ABAABBAAABBB…), ou impliquant plus de deux éléments (ABCDABCD… ; AABBCC…).
- Nous conseillons aux enseignants de proposer **différentes tâches** à leurs élèves : copier un motif, l’étendre et le prolonger, trouver l’intrus dans une séquence, compléter une figure par son image symétrique, compléter une série de nombres…
- Les jeux et les exercices avec des **figures géométriques** sont un excellent moyen d’introduire implicitement des concepts mathématiques importants (symétrie, moitié, paire, ensemble, fraction…).
- Le **caractère ludique, créatif, artistique** des exercices avec les motifs pourrait être favorable au développement mathématique chez les garçons comme chez les filles, en diminuant les stéréotypes associés à cette discipline.
- Nous suggérons aux enseignants de valoriser les **multiples formulations abstraites** que les élèves peuvent proposer pour un motif, mais de toujours les guider de manière **explicite** dans la compréhension des concepts mathématiques sous-jacents, auxquels les motifs ne constituent qu’une première approche intuitive.

Bibliographie

1. Steen, L. A. The Science of Patterns. *Science* 240, 611–616 (1988).

2. Zazkis, R. & Liljedahl, P. Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics* 49, 379–402 (2002).

3. Smith, M. S., Hillen, A. F. & Catania, C. L. Using Pattern Tasks to Develop Mathematical Understandings and Set Classroom Norms. *MTMS* 13, 38–44 (2007).

4. Sablé-Meyer, M. et al. Sensitivity to geometric shape regularity in humans and baboons: A putative signature of human singularity. *Proc Natl Acad Sci USA* 118, e2023123118 (2021).

5. Starkey, G. S. & McCandliss, B. D. The emergence of "groupitizing" in children's numerical cognition. *Journal of Experimental Child Psychology* 126, 120–137 (2014).

6. Ciccione, L. & Dehaene, S. Grouping Mechanisms in Numerosity Perception. *Open Mind* 4, 102–118 (2020).

7. Ciccione, L. & Dehaene, S. Can humans perform mental regression on a graph? Accuracy and bias in the perception of scatterplots. *Cognitive Psychology* 128, 101406 (2021).

8. Ciccione, L., Sablé-Meyer, M. & Dehaene, S. Analyzing the misperception of exponential growth in graphs. *Cognition* 225, 105112 (2022).

9. Ciccione, L., Dehaene, G. & Dehaene, S. Outlier detection and rejection in scatterplots: Do outliers influence intuitive statistical judgments? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance* 49, 129–144 (2023).

10. Ciccione, L. *et al.* Trend judgment as a perceptual building block of graphicacy and mathematics, across age, education, and culture. *Scientific Reports* (2023).

11. Schulz, E., Tenenbaum, J. B., Duvenaud, D., Speekenbrink, M. & Gershman, S. J. Compositional inductive biases in function learning. *Cognitive Psychology* 99, 44–79 (2017).

12. Sablé-Meyer, M., Ellis, K., Tenenbaum, J. & Dehaene, S. A language of thought for the mental representation of geometric shapes. *Cognitive Psychology* 139, (2022).

13. Dehaene, S., Al Roumi, F., Lakretz, Y., Planton, S. & Sablé-Meyer, M. Symbols and mental programs: a hypothesis about human singularity. *Trends in Cognitive Sciences* 26, 751–766 (2022).

14. Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B. & Verschaffel, L. Young Children's Patterning Competencies and Mathematical Development: A Review. in *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (eds. Robinson, K. M., Osana, H. P. & Kotsopoulos, D.) 139–161 (Springer International Publishing, 2019). doi:10.1007/978-3-030-12895-1_9.

15. Martin, L. *et al.* Abstract representations of small sets in newborns. *Cognition* 226, 105184 (2022).

16. Verdine, B. N. *et al.* Deconstructing Building Blocks: Preschoolers' Spatial Assembly Performance Relates to Early Mathematical Skills. *Child Dev* 85, 1062–1076 (2014).

17. Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E. & McEldoon, K. L. Emerging Understanding of Patterning in 4-Year-Olds. *Journal of Cognition and Development* 14, 376–396 (2013).

18. Fyfe, E. R., McNeil, N. M. & Rittle-Johnson, B. Easy as ABCABC: Abstract Language Facilitates Performance on a Concrete Patterning Task. *Child Dev* 86, 927–935 (2015).

19. Kotovsky, L. & Gentner, D. Comparison and Categorization in the Development of Relational Similarity. *Child Development* 67, 2797 (1996).

20. Papic, M. M., Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *JRME* 42, 237–268 (2011).

21. Gadzichowski, K. M. Patterning Abilities of First Grade Children: Effects of Dimension and Type. *CE* 03, 632–635 (2012).

22. Jirout, J. J. & Newcombe, N. S. Building Blocks for Developing Spatial Skills: Evidence From a Large, Representative U.S. Sample. *Psychol Sci* 26, 302–310 (2015).

23. Vanluydt, E., Wijns, N., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. Early childhood mathematical development: the association between patterning and proportional reasoning. *Educ Stud Math* 107, 93–110 (2021).

24. Lee, K., Ng, S. F., Bull, R., Pe, M. L. & Ho, R. H. M. Are patterns important? An investigation of the relationships between proficiencies in patterns, computation, executive functioning, and algebraic word problems. *Journal of Educational Psychology* 103, 269–281 (2011).

25. Collins, M. A. & Laski, E. V. Preschoolers' strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly* 32, 204–214 (2015).

26. Zippert, E. L., Clayback, K. & Rittle-Johnson, B. Not Just IQ: Patterning Predicts Preschoolers' Math Knowledge Beyond Fluid Reasoning. *Journal of Cognition and Development* 20, 752–771 (2019).

27. Kidd, J. K. *et al.* Effects of Patterning Instruction on the Academic Achievement of 1st-Grade Children. *Journal of Research in Childhood Education* 27, 224–238 (2013).

28. Pasnak, R. Empirical Studies of Patterning. *PSYCH* 08, 2276–2293 (2017).

29. Warren, E. & Cooper, T. Repeating Patterns and Multiplicative Thinking: Analysis of Classroom Interactions with 9 -Year- Old Students that Support the Transition from the Known to the Novel. *The Journal of Classroom Interaction* 41, (2007).

30. Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B., De Keyser, L. & Torbeyns, J. Stimulating preschoolers' focus on structure in repeating and growing patterns. *Learning and Instruction* 74, 101444 (2021).

31. Burgoyne, K., Witteveen, K., Tolan, A., Malone, S. & Hulme, C. Pattern Understanding: Relationships With Arithmetic and Reading Development. *Child Dev Perspect* 11, 239–244 (2017).

32. Planton, S. *et al.* A theory of memory for binary sequences: Evidence for a mental compression algorithm in humans. *PLoS Comput Biol* 17, e1008598 (2021).

33. Zentner, M. & Eerola, T. Rhythmic engagement with music in infancy. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 107, 5768–5773 (2010).

34. Geist, K., Geist, E. A. & Kuznik, K. Young Children Learning Mathematics through Beat, Rhythm, and Melody. *Young Children* (2012).

35. Edelson, R. J. & Johnson, G. Music Makes Math Meaningful. *Childhood Education* 80, 65–70 (2003).

36. Klemish, J. J. A Comparative Study of Two Methods of Teaching Music Reading to First-Grade Children. *Journal of Research in Music Education* 18, 355–364 (1970).

37. Planton, S. & Dehaene, S. Cerebral representation of sequence patterns across multiple presentation formats. *Cortex* 145, 13–36 (2021).

38. Graziano, A. B., Peterson, M. & Shaw, G. L. Enhanced learning of proportional math through music training and spatial-temporal training. *Neurological Research* 21, 139–152 (1999).

39. Spelke, E. Effects of music instruction on developing cognitive systems at the foundations of mathematics and science. *Learning, arts, and the brain* 17, (2008).

40. Holmes, S. & Hallam, S. The impact of participation in music on learning mathematics. *London Review of Education* (2017) doi:10.18546/LRE.15.3.07.

41. Mehr, S. A., Schachner, A., Katz, R. C. & Spelke, E. S. Two Randomized Trials Provide No Consistent Evidence for Nonmusical Cognitive Benefits of Brief Preschool Music Enrichment. *PLoS ONE* 8, e82007 (2013).

42. Gordon, R. L., Fehd, H. M. & McCandliss, B. D. Does Music Training Enhance Literacy Skills? A Meta-Analysis. *Front. Psychol.* 6, (2015).

43. Montgomery, D. Teaching Prereading Skills through Training in Pattern Recognition. *The Reading Teacher* 30, (1977).

44. Swaminathan, S. & Schellenberg, E. G. Musical ability, music training, and language ability in childhood. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 46, 2340–2348 (2020).

45. Huguet, P., Brunot, S. & Monteil, J. M. Geometry versus drawing: Changing the meaning of the task as a means to change performance. *Social Psychology of Education* 4, 219–234 (2001).

46. Mayer, R. E. Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? *American Psychologist* 59, 14–19 (2004).

47. Guilmois, C. Efficacité de l'enseignement socioconstructiviste et de l'enseignement explicite en éducation prioritaire : Quelle alternative pour apprendre les mathématiques ? (Antilles, 2019).

48. Guilmois, C., Popa-Roch, M., Clément, C., Bissonnette, S. & Troadec, B. Effective numeracy educational interventions for students from disadvantaged social background: a comparison of two teaching methods. *Educational Research and Evaluation* 1–21 (2020).

49. Archer, A. L. & Hughes, C. A. *Explicit Instruction: Effective and Efficient Teaching*. (The Guilford Press, 2011).

50. Smith, D., Myers, J. S., Kaplan, C. S. & Goodman-Strauss, C. An aperiodic monotile. Preprint at http://arxiv.org/abs/2303.10798 (2023).

51. Amalric, M. & Dehaene, S. Cortical circuits for mathematical knowledge: evidence for a major subdivision within the brain's semantic networks. *Phil. Trans. R. Soc. B* 373, 20160515 (2018).

52. Amalric, M. & Dehaene, S. Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 113, 4909–4917 (2016).

53. Fedorenko, E. & Varley, R. Language and thought are not the same thing: evidence from neuroimaging and neurological patients: Language versus thought. *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 1369, 132–153 (2016).

54. Lake, B. M., Salakhutdinov, R. & Tenenbaum, J. B. Human-level concept learning through probabilistic program induction. *Science* 350, 1332–1338 (2015).

Retrouvez l'intégralité des publications du CSEN sur :

reseau-canope.fr/conseil-scientifique-de-leducation-nationale